Chapitre : FONCTIONS SINUS ET COSINUS

ACTIVITES P.140

1. Rappels

1.1 Mesure principale

définition : On appelle mesure principale d'un angle α , la mesure x qui se trouve dans l'intervalle] -π; $+\pi$]

Exemple :

La mesure principale de l'angle dont la mesure est $\frac{17\pi}{4}$ est $\frac{17\pi}{4} - 2k\pi = \frac{17\pi}{4} - \frac{8k\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ avec k = 2

La mesure principale de l'angle dont la mesure est $\frac{-31\pi}{6}$ est $\frac{-31\pi}{6} + 2k\pi = \frac{-31\pi}{6} + \frac{12k\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ avec k = 3

1.2 Résolution d'équations

Théorème : Equations trigonométriques

- $l'équation\ \cos x\ = \cos a\ admet\ les\ solutions\ suivantes\ sur\ R$:

$$x = \ a + k2\pi\ ou\ x = -a + k2\pi\ avec\ k\ \in Z$$

- $l'équation\ \sin x\ = \sin a\ admet\ les\ solutions\ suivantes\ sur\ R$:

$$x = \ a + k2\pi\ ou\ x = \pi - a + k2\pi\ avec\ k\ \in Z$$

Exemple :

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a)$\sqrt{2}cosx - 1 = 0$ b)$2sinx - \sqrt{3} = 0$.

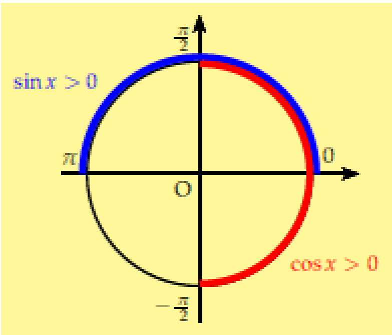
Solutions:

a) $se\ ramène\ à\ \cos x = cos\frac{\pi}{4}\ d'où\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi\ ou\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi\ avec\ k\ \in Z$
b) $se\ ramène\ à\ \sin x = sin\frac{\pi}{3}\ d'où\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi\ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi\ avec\ k\ \in Z$

1.3 Signe des lignes trigonométriques

Théorème : on a sur] -π; $+\pi$]

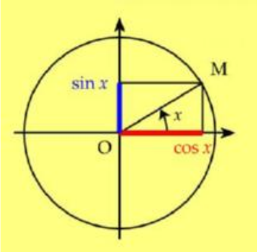
$Sin\ x\ > 0 \Leftrightarrow x\ \in]0; \pi[$ et $\cos x > 0\ \Leftrightarrow x\ \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



2. FONCTIONS SIN ET COS

2.1 Définitions

- A tout réel x, on associe un point unique M du cercle unité C (dit cercle trigonométrique) de centre O, dont les coordonnées sont M(cos x; sin x)



- On appelle fonctions sinus et cosinus les fonctions respectives : $x \rightarrow sinx\ et\ x \rightarrow cosx$

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}\ -1 \leq sinx \leq 1\ et -1 \leq cosx \leq 1$

2.2 Propriétés

2.2.1 Parité

Théorème : D'après les formules de trigonométrie :

- $La\ fonction\ sinus\ est\ impaire : \forall x \in \mathbb{R}\ sin(-x)\ = -\ sinx$
- $La\ fonction\ cosinus\ est\ paire\ :\ \forall x \in \mathbb{R}\ cos(-x)\ =\ cos\ x$

Conséquence: La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine, et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l''axe des ordonnées.

2.2.2 Périodicité

Théorème : les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T\ =\ 2\pi$

$\forall x \in \mathbb{R}\ sin(x\ +\ 2\pi) =\ sinx\ et\ cos(x\ +\ 2\pi) = cosx$

Conséquence : On étudiera les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur $2\pi, comme$ par exemple] -π; +π].

2.2.3 Utilisation

Théorème : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x\ et\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sinx$

Exemple : pour résoudre dans]-π; +π] l'équation $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$, on a

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{D'où } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi\ ou\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + k2\pi$$

$$\text{Soit } x\ =\ \frac{\pi}{8} + k\pi$$

$$\text{ie } x\ =\ \frac{\pi}{8}\, ou\ \frac{7\pi}{8} \text{ dans]-}\pi\text{; +}\pi\text{]}$$

3 Etude des fonctions sinus et cosinus

3.1 Dérivées

Théorème : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$sin'x =\ cosx\ et\ cos'x =\ -\ sinx$$

NB : On admettra ces résultats.

Exemple : soit la fonction f définie sur ℝ par: $f(x) = \cos 2x + \cos^2 x$
La fonction f est dérivable sur ℝ car composée et produit de fonctions dérivables sur ℝ

$$f'(x) = -2\sin 2x - 2\sin x \cos x = -2\sin 2x - \sin 2x = -3\sin 2x$$

3.2 Calculs de limites

Théorème : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Démonstration On revient à la définition du nombre dérivée en 0.

$$\sin' 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

or on sait que : $\sin' 0 = \cos 0 = 1$ donc $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

de même, on a :

$$\cos' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

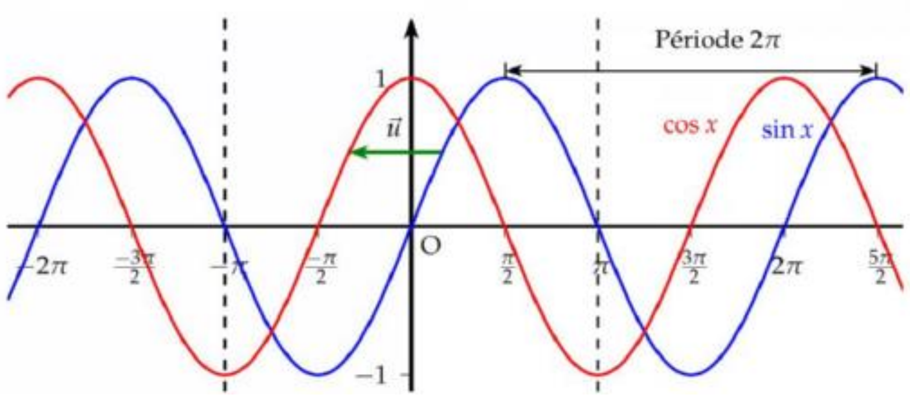
or on sait que : $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$ donc $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

3.3 Variation

Comme les fonctions sinus et cosinus sont 2π périodiques, on étudie les variations sur l'intervalle]-π; +π]et on obtient les tableaux de variation suivants :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1



3.4.NB : a et b sont deux réels.

Les fonctions f et g définies sur ℝ par $f(x) = \sin(ax + b)$ et $g(x) = \cos(a x + b)$ sont dérivables sur ℝ et on a : $f'(x) = a\cos(ax + b)$et $g(x) = -a\sin(a x + b)$