Première S

Devoir à la maison

Correction DM n°8 à faire sur copie double

Exercice N° 51 et 57 p. 340

N° 51

- **a)**
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 2\cos^2(x)-1\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2-1\\ &= \frac{2}{16}(6+2+2\sqrt{12})-1\\ &= 1+\frac{4}{16}\times 2\sqrt{3}-1\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

b) Or $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donc $2x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{12}$.

N° 57

a)
$$\begin{aligned}\cos(3a) &= \cos(2a+a)\\ &= \cos(2a)\cos(a)-\sin(2a)\sin(a)\\ &= (2\cos^2(a)-1)\cos(a)-2\cos(a)\sin^2(a)\\ &= 2\cos^3(a)-\cos(a)-2\cos(a)(1-\cos^2(a))\\ &= 4\cos^3(a)-3\cos(a).\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sin(3a) &= \sin(2a+a)\\ &= \sin(2a)\cos(a)+\sin(a)\cos(2a)\\ &= 2\sin(a)\cos^2(a)+\sin(a)(1-2\sin^2(a))\\ &= (2\sin(a)(1-\sin^2(a))+\sin(a)(1-2\sin^2(a))\\ &= 3\sin(a)-4\sin^3(a).\end{aligned}$$

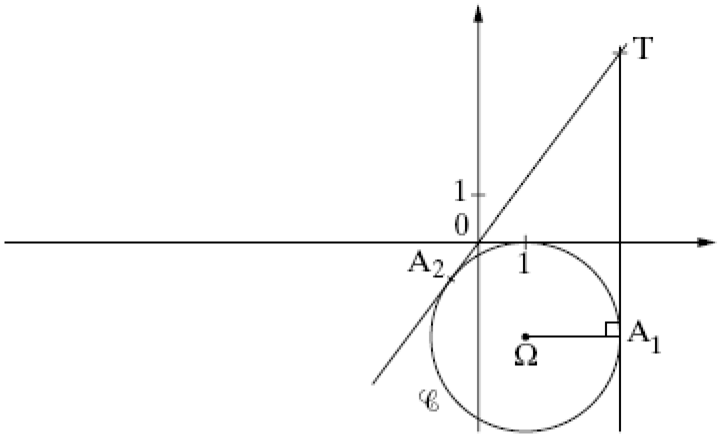
Exercice N° 89 p. 343 Des tangentes à un cercle

1. a)
$$\begin{aligned}x^2-2x+y^2+4y+1 &= 0\\ (x-1)^2+(y+2)^2-1-4+1 &= 0\end{aligned}$$
donc $(x-1)^2+(y+2)^2 = 4$.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(1;-2)$ et de rayon 2.

Devoir à la maison

b)



2. a) (TA_1) est la tangente en A_1 à $\mathscr{C}$ donc $(\Omega A_1) \perp (TA_1)$.
(TA_2) est la tangente en A_2 à $\mathscr{C}$ donc $(\Omega A_2) \perp (TA_2)$.
$(\Omega A_1) \perp (TA_1)$ donc A_1 est un point du cercle de diamètre $[\Omega T]$.
De même, A_2 est un point du cercle de diamètre $[\Omega T]$.

b) $M(x,y) \in \mathscr{C}'$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{TM} = 0$

$(x-1)(x-3)+(y+2)(y-4) = 0$

$x^2-4x+3+y^2-2y-8 = 0$

$x^2-4x+y^2-2y-5 = 0$.

c) Les coordonnées des points A_1 et A_2 vérifient les équations des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$:

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2+4y+1 = 0 \\ x^2-4x+y^2-2y-5 = 0 \end{cases}$$

En retranchant il vient $2x+6y+6 = 0$ donc $x = -3y-3$.
En remplaçant dans la première équation :

$(-3y-3)^2-2(-3y-3)+y^2+4y+1 = 0$

$9y^2+18y+9+6y+6+y^2+4y+1 = 0$

$10y^2+28y+16 = 0$

$5y^2+14y+8 = 0$

$\Delta = 36$ on trouve $y_1 = -2$ et $y_2 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

d'où $x_1 = -3\times(-2)-3 = 3$ et $x_2 = \frac{24}{10}-\frac{30}{10} = -\frac{6}{10}$.

On obtient $A_1(3;-2)$ et $A_2(-0,6;-0,8)$.

d) $T(3;4)$ et $A_1(3;-2)$.
Une équation de la droite (A_1T) est $x = 3$.
$T(3;4)$ et $A_2(-0,6;-0,8)$.
Une équation de la droite (A_2T) est $y = \frac{4}{3}x$.

Première S

Devoir à la maison

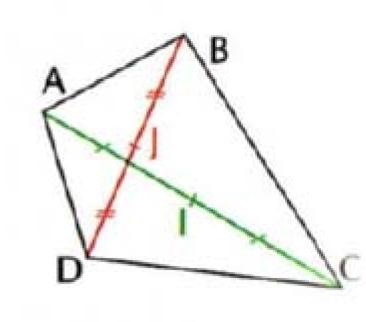
Exercice N° 95 p. 344 **Restitution de connaissances**

A et B sont deux points distincts et K est le milieu de [AB].

1. Démonstration du théorème de la médiane

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2 \\ &= 2\,\overrightarrow{MK}^2 + \overrightarrow{KA}^2 + \overrightarrow{KB}^2 + 2\,\overrightarrow{MK}.\underbrace{(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB})}_{\vec{0}}. \end{aligned}$$

2. ABCD est un quadrilatère. I et J sont les milieux respectifs de [AC] et [BD].



a) Appliquer le théorème de la médiane aux triangles ABC, ACD, IBD.

$$\begin{aligned} BA^2 + BC^2 &= 2\,BI^2 + \frac{1}{2}\,AC^2 \\ DA^2 + DC^2 &= 2\,DI^2 + \frac{1}{2}\,AC^2 \\ IB^2 + ID^2 &= 2\,IJ^2 + \frac{1}{2}\,DB^2 \end{aligned}$$

b) En déduire que : $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4\,IJ^2 + AC^2 + BD^2$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 &= 2\,(BI^2 + DI^2) + AC^2 \\ &= 4\,IJ^2 + DB^2 + AC^2. \end{aligned}$$

b) Euler affirmait :« La somme des carrés des côtés d'un quadrilatère est supérieure ou égale à la somme des carrés des diagonales. »

On a :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \geqslant DB^2 + AC^2$$

Peut-on avoir égalité ? Dans quelle situation ?

L'égalité a lieu si, et seulement si, $4\,IJ^2 = 0$, c'est-à-dire $I = J$. Le quadrilatère ABCD est alors un parallélogramme.