Droites et plans de l'espace

IX. 0. Vérifier les acquis et activités

p. 354 – 356 - 357

IX. Résolution d'un système linéaire

Exemple :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Méthode 1 : substitution
De l'équation (3), on tire $z = x + y – 2$.
On reporte dans (1) et (2), $2x – y + 3(x + y – 2) = 0$ et $x – 2y + (x + y – 2) = 1$, ce qui nous donne un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 5x + 2y = 6 \\ 2x – y = 3 \end{cases}$$

La résolution donne $x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}$ et par conséquent : $z = \frac{4}{3} + (-\frac{1}{3}) -2 = -1$

conclusion Le système admet un unique triplet solution : $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : combinaison linéaire
(2) + (3) donne $2x – y = 3$ L1
(1) + (3) donne $3x + 2z = 2$ L2
(1) - 2×(2) donne $3y + z = -2$ L3

On a donc de L1 : $y = 2x - 3$ (L1') d'où L2 : $3x + 2z = 2$ (L2') et L3 : $6x - 9 + z = -2$ soit $6x + z = 7$ (L3')
Avec 2(L2') – (L3'), on obtient $3z = -3$ c'est-à-dire $z = -1$ puis en reportant $x = \frac{4}{3}$ et $y = -\frac{1}{3}$

On vérifie que ces valeurs sont solutions, puis:

conclusion Le système admet un unique triplet solution : $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

Méthode 3 : pivot de Gauss

2	X +	-1	Y +	3	Z	=	0
1	X +	-2	Y +	1	Z	=	1
1	X +	1	Y +	-1	Z	=	2

1	X +	-1/2	Y +	3/2	Z	=	0
1	X +	-2	Y +	1	Z	=	1
1	X +	1	Y +	-1	Z	=	2

1	X +	-1/2	Y +	3/2	Z	=	0
0	X +	3/2	Y +	1/2	Z	=	-1
0	X +	-3/2	Y +	5/2	Z	=	-2

1	X +	-1/2	Y +	3/2	Z	=	0
		1	Y +	1/3	Z	=	-2/3
		1	Y +	-5/3	Z	=	4/3

1	X +	-1/2	Y +	3/2	Z	=	0
		1	Y +	1/3	Z	=	-2/3
		0	Y +	2	Z	=	-2

1	X +	-1/2	Y +	3/2	Z	=	0
		1	Y +	1/3	Z	=	-2/3
				1	Z	=	-1

X	**=**	**4/3**
Y	**=**	**- 1/3**
Z	**=**	**-1**

conclusion Le système admet un unique triplet solution : $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

IX. 2. Caractérisation de droites, de plans à l'aide du barycentre

1. Droite et segment de l'espace

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$, t étant un réel.

Alors

L'ensemble des barycentres de (A ; 1-t), (B ; t), avec t réel, est la droite (AB).
L'ensemble des barycentres de (A ; 1-t), (B ; t), avec t $\in$ [0 ;1], est le segment [AB].

Démonstration :
Pour tout réel t, dire que « M est le barycentre de (A; 1 - t), (B ; t) » équivaut à dire que, pour tout point P de l'espace, $(1-t)\ \overrightarrow{PA} + t\ \overrightarrow{PB} = (1-t+t)\ \overrightarrow{PM}$, soit avec P = A, $t\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$. CQFD

Remarque :
Le segment [AB] est aussi l'ensemble de tous les barycentres de (A; α), (B ; β),
avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, et $\alpha + \beta \neq 0$

Démonstration :

Si M est le barycentre de (A; α), (B ; β), alors il est aussi celui de (A; $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$), (B ; $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$), et en posant $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ on a $1 - t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ d'où M est le barycentre de (A; 1-t), (B ; t),

Conséquence : Caractérisation de l'intérieur d'un triangle

L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres de (A; α), (B ; β), (C ; γ) avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$

2. **<u>plans de l'espace</u>**

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec x et y réels quelconques.

Alors

« M appartient au plan (ABC) » équivaut à « il existe deux réels x et y tels que M est le barycentre de (A; 1 - x - y), (B ; x), (C ;y)».

Ainsi tout point du plan (ABC) est un barycentre de A, B, C.

Démonstration

L'égalité $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ s'écrit $\overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$ soit

$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

or $(1 - x - y) + x + y \neq 0$ donc M est le barycentre de (A ; 1 - x - y), (B ; x), (C ;y).

IX. 3. Représentations paramétriques

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère

1. **<u>Représentation paramétrique d'une droite.</u>**

NB : ce n'est pas un système !

Soit d la droite définie par la donnée d'un point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et d'un vecteur directeur $\vec{u}(a ; b ; c)$

alors

Le point M(x ; y ; z) appartient à cette droite si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui se traduit par:

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$$

<u>Théorème:</u> la droite d définie par le point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et le vecteur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{avec } t \text{ réel}$$

Exemple: la droite d passant par A(1,2,-1) et B(3,1,-1)

Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(2, -1, 0)$. Le point A est un point de (AB) alors une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 \end{cases} \quad \textbf{avec t réel}$$

2. **Représentation paramétrique d'une demi-droite, d'un segment.**

La Demi-droite : définie par le point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et le vecteur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0 ; +\infty[$$

Le Segment : défini par le point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et le vecteur $\vec{u}(a ; b ; c)$ est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0 ; 1]$$

IX. 4. Intersections de droites et de plans

1. **Intersection de deux plans.**

Soit P1 et P2 d' équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$
P1 et P2 sont sécants ou parallèles selon que leurs vecteurs normaux sont colinéaires ou non .
Il faut résoudre le système :

NB : les différentes positions de P1 et P2, ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

- P1 = P2 (confondus) alors le système admet pour solution tout triplet (x,y,z) solution de l'une ou l'autre équation.
- P1 et P2 parallèles alors le système n'admet pas de solution.
- P1 et P2 sécants alors le système admet pour solution Δ, qui n'est pas sous forme paramétrique, ensemble des points de coordonnées (x,y,z) solutions du système.

Exemple :
P1 : $2x + 3y - z + 2 = 0$
P2 : $x + 2y - z + 1 = 0$

P1 a pour vecteur normal $\vec{n}(2, 3, -1)$ et P2 a pour vecteur normal $\vec{n}'(1, 2, -1)$. Ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les plans sont sécants suivant une droite Δ telle que :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

De (2), z = x + 2y + 1 dans (1) x + y + 1 = 0 donc $\begin{cases} z = x + 2y + 1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

soit encore : $\begin{cases} z = x + 2y + 1 \\ x = -y - 1 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} z = y \\ x = -y - 1 \end{cases}$

Finalement pour y = t, $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de Δ

2. Intersection d'un droite et d'un plan.

P a pour équation ax + by + cz + d = 0 et donc pour vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$

Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\,(\alpha,\beta,\gamma)$ et passe par le point $A(x_o\,;\,y_o\,;\,z_o)$.

Δ est soit parallèle, soit sécante à P suivant que $\vec{n}$ est orthogonal ou non à $\vec{u}$.
On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

- Si $\Delta \subset P$, le système a une infinité de solutions.
- Si Δ et P sont disjoints, le système n'a pas de solution.
- Si Δ et P sont sécants, le système a une seule solution : les coordonnées de leur point d'intersection I, (x' ; y' ; z') solution du système.

Exemple :

ÉNONCÉ

Prouvez que le plan $\mathcal{P}$: $2x - y + z - 8 = 0$ et la droite d passant par $A(3\,;-1\,;0)$ et $B(4\,;1\,;-1)$ se coupent en un point I dont vous calculerez les coordonnées.

SOLUTION COMMENTÉE

d est dirigée par $\overrightarrow{AB}(1\,;2\,;-1)$ et $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(2\,;-1\,;1)$.
Pour trouver la position de $\mathcal{P}$ et d, calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 1\times 2 + 2\times(-1) + (-1)\times 1 = -1$. Ainsi $\overrightarrow{AB}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}$ donc d coupe $\mathcal{P}$ en un point I.
Les coordonnées de I sont données par la solution du système formé des équations paramétriques de la droite d et de l'équation du plan $\mathcal{P}$.

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t \\ 2x - y + z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t \\ -t - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} t = -1 \\ x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi (AB) coupe $\mathcal{P}$ en $I(2\,;-3\,;1)$.

3. Intersection de trois plans.