Devoir surveillé n°2 : correction

Exercice 1 : 4 pts (spé seulement)

Décomposer 469 en un produit de facteurs premiers
$469 = 7 \times 67$
Trouver tous les couples (x ; y) d'entiers positifs tels que $x^3 - y^3 = 469$
$x^3 - y^3 = 469$ se ramène à $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 7 \times 67$ ou $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 \times 469$
comme x et y sont des entiers positifs, $x - y$ est le plus petit des deux
d'où

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 469 \end{cases} \quad x = 1 + y \text{ et alors } (1 + y)^2 + (1 + y)y + y^2 = 469$$

Soit donc $1 + 2y + y^2 + y + y^2 + y^2 = 469 \Leftrightarrow 3y^2 + 3y - 468 = 0 \Leftrightarrow 3(y^2 + y - 156) = 0$
Soit pour $y^2 + y - 156 = 0$
$\Delta = 1 + 624 = 625$ deux solutions réelles pour y 12 et -13 (qui ne convient pas)
Par conséquent y = 12 et x = 13
ou

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + xy + y^2 = 67 \end{cases} \quad x = 7 + y \text{ et alors } (7 + y)^2 + (7 + y)y + y^2 = 67$$

Soit donc $49 + 14y + y^2 + 7y + y^2 + y^2 = 67 \Leftrightarrow 3y^2 + 21y - 18 = 0 \Leftrightarrow 3(y^2 + 7y - 3) = 0$
Soit pour $y^2 + 7y - 3 = 0$
$\Delta = 49 + 12 = 61$ deux solutions réelles mais non entières (61 n'est pas un carré)
Conclusion : un couple solution (13,12)

Exercice 1 : 4 pts (non spé seulement)

Soit la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - 3x - 5 + \sqrt{x^2 + 1} - \cos x$

1. Pourquoi f est-elle dérivable sur R ?
   f est composée de fonctions dérivables sur R
2. Calculer f '(x)

$$f'(x) = 2x - 3 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} + \sin x = 2x - 3 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \sin x$$

Exercice 2 : 7 pts

On se propose de résoudre l'équation : $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$ (E1)

Pour cela, répondre aux questions suivantes :

On considère la fonction $f : x \to \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
   La fonction f est définie sur $]0 ;+\infty[$
   $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc les résultats sur les opérations avec les limites
   permettent de conclure : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
   $\lim\limits_{x\to +\text{inf}} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\text{inf}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc les résultats sur les opérations avec les limites
   permettent de conclure : $\lim\limits_{x\to +\text{inf}} f(x) = +\infty$

2. Etudier le sens de variations de f

La fonction f est dérivable sur R et on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$

Donc

x	0 $+\infty$
f'	+
f(x)	- ∝ ↗ + ∝

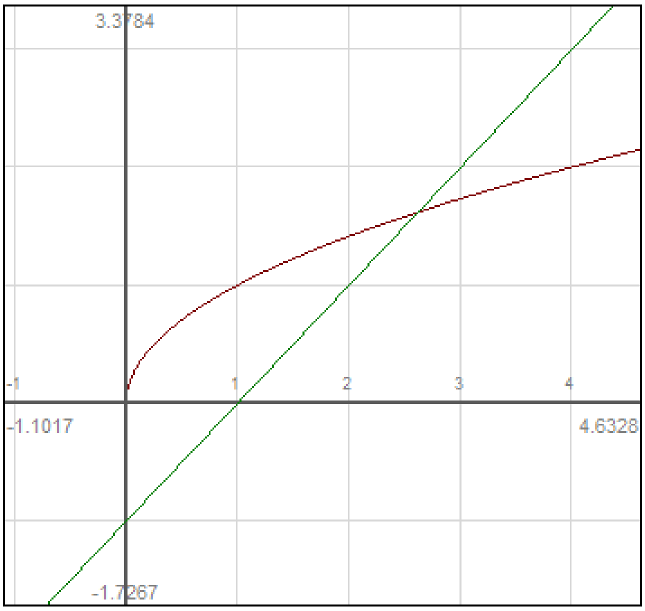
3. En déduire (en citant le théorème utilisé) que l'équation (E1) admet une seule solution.

La fonction f est continue et strictement croissante de -∝ à + ∝ sur] 0 ; + ∝ [alors il existe une unique valeur $\alpha > 0$ telle que $f(\alpha) = 1$. donc f admet une seule soltion

4. Démontrer que (E1) est équivalente à l'équation : $x - 1 = \sqrt{x}$ (E2)

$\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x}$

5. Déterminer graphiquement (grâce aux courbes de $x - 1$ et $\sqrt{x}$) un encadrement de α par deux entiers consécutifs.



Grâce à la calculatrice, on lit $2 < \alpha < 3$

6. Démontrer que α vérifie $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$

Comme α est solution de $x - 1 = \sqrt{x}$ alors $\alpha - 1 = \sqrt{\alpha}$ soit $(\alpha - 1)^2 = (\sqrt{\alpha})^2$

D'où $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha$ ie $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$

7. En déduire la valeur exacte de α.

$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$ est une équation du second degré $\Delta = 5$ et alors $\alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ soit environ 0,38 ou 2,62. La valeur qui convient est $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

Exercice 3 : 5 pts

Devoir surveillé n°2 : correction

Dans un repère orthonormal, on considère les points A(-1 ; -1 ; 0) et B(2 ; 0 ; 4) et C(0 ; 3 ; 5)

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; -1) est normal au plan (ABC)

   $\vec{n}$ (1 ; 1 ; -1) est normal au plan (ABC) si et seulement si $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

   Or $\overrightarrow{AB}$ (3 ; 1 ; 4) et $\overrightarrow{AC}$ (1 ; 4 ; 5)

   $\vec{n} . \overrightarrow{AB} = 3 + 1 - 4 = 0$ et $\vec{n} . \overrightarrow{AC} = 1 + 4 - 5 = 0$

   Conclusion : $\vec{n}$ (1 ; 1 ; -1) est normal au plan (ABC)

2. Donner une équation du plan (ABC)

Une équation de (ABC) est $x + y - z + d = 0$
Or A est un point du plan donc $-1 -1 - 0 + d = 0$ d'où $d = 2$
Alors une équation du plan (ABC) est : $x + y - z + 2 = 0$