Chapitre 1 : Raisonnement par récurrence

1. Principe

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer si une proposition P_n qui dépend de n est vraie ou fausse.

Principe du raisonnement par récurrence

Soit une proposition quelconque qui varie en fonction de n ($n \in \mathbb{N}$), on la note P_n. On souhaite montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq n_0$

Phase 1 Initialisation : on vérifie qu'elle est au moins vraie pour la première valeur de n, n_0. Le plus souvent c'est $n_0 = 0$.

On s'aperçoit que c'est le cas, alors la question que l'on se pose maintenant c'est de savoir si c'est toujours le cas !

Phase 2 Hérédité : on suppose que pour n quelconque, on a P_n qui est vraie et en utilisant uniquement cette hypothèse on arrive à démontrer qu'alors elle est vraie pour n+1. Autrement dit pour $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ si P_n vraie alors P_{n+1} vraie.

Phase 3 Conclusion : on a "Pn_0 vraie" et pour $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ si P_n vraie alors P_{n+1} vraie. Comme Pn_0 est vraie alors Pn_1 aussi, comme Pn_1 est vraie alors Pn_2 aussi, … et ainsi de proche en proche on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Axiome de récurrence:

P_n désigne une proposition qui dépend d'un entier naturel n.

Pour démontrer que $\forall\ n \geq n_0$, P_n est vraie, il suffit de:

1 vérifier que P_{n0} est vraie

2 supposer que pour tout entier naturel quelconque $n \geq n_0$, P_n est vraie, et sous cette hypothèse, on démontre que la proposition P_{n+1} est vraie

Conclusion: P_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque: Lorsque l'on a P_n vraie => P_{n+1} vraie on dit que la proposition P_n est héréditaire.

2. Exemples

Exemple 1

On considère la proposition P(n) dépendant d'un entier n « $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 »
(On rappelle qu'un nombre est multiple de 11 lorsqu'il s'écrit sous la forme $11 \times k$ avec $k \in Z$)

Etape 1 :
Vérifions que cette proposition est vraie pour n = 0
P_0 : $10^0 - (-1)^0 = 1 - 1 = 0$ est un multiple de 11 donc P(n) vraie pour n = 0
Etape 2 :
Supposons que la proposition est vraie pour un rang n (n étant un entier naturel fixé).
Alors pour cet entier naturel n, on a : $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11, c'est-a-dire $10^n - (-1)^n = 11 \times k$ avec $k \in Z$.
On veut alors démontrer que la proposition est vraie pour n+1 c'est à dire que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times k'$ avec $k' \in Z$.
Puisque $10^n - (-1)^n = 11 \times k$ avec $k \in Z$, alors on peut écrire $10^n = 11 \times k + (-1)^n$
D'où en multipliant chaque membre par 10,

$$10 \times 10^n = 10 \times (11 \times k + (-1)^n) = 110k + 10 \times (-1)^n$$

D'où en enlevant $(-1)^{n+1}$ à chaque membre

$$10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110k + 10 \times (-1)^n - (-1)^{n+1}$$

Soit $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 110k + (-1)^{n} [10 - (-1)^{1}] = 110k + (-1)^{n} \times [10 + 1] = 110k + (-1)^{n} \times 11$
donc $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11\times (10k + (-1)^{n}) = 11 \times k'$
en effet k étant un entier, le nombre $k' = 10k + (-1)^{n})$ est aussi un entier.
On a donc démontré que $10^{n+1} - (-1)^{n+1} = 11 \times k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.
C'est-à-dire le caractère "héréditaire" de la proposition.
Si la proposition est vraie pour un entier n, alors elle est vraie pour l'entier suivant n + 1.
On peut alors observer que : puisqu'elle est vraie pour 0, elle est vraie pour 1, puisqu'elle est vraie pour 1, elle est vraie pour 2 ....., la proposition est vraie pour tous les entiers n de IN.
Conclusion : « 10" - (-1)" est un multiple de 11 » pour tout n de N

<u>Exemple 2</u>
Démontrons par récurrence que pour tout n entier supérieur ou égal à 10 on a 2" ≥ 100n
Soit P(n) la proposition : $2^n \geq 100n$.
Etape 1 :
pour n = 10, on a 2" = 2^{10} = 1 024 et 100n = 1 000
or 1 024 ≥ 1 000 donc la proposition P(n) est vraie pour n =10.
Etape 2 :
Supposons que la proposition P(n) est vraie pour un entier naturel fixé n ≥ 10, on a donc
2" ≥ 100n.
On veut alors démontrer que P(n+1) est vraie c'est-à-dire que $2^{n+1} \geq 100(n + 1)$.
Sachant que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, on a d'après l'hypothèse de récurrence : $2 \times 2^n \geq 2 \times 100n$.
C'est-à-dire : $2^{n+1} \geq 2 \times 100n$, soit encore $2^{n+1} \geq 100n + 100n$
Comme n est un entier supérieur ou égal à 10 alors $100n \geq 1\,000 \geq 100$
D'où il vient $2^{n+1} \geq 100n + 100$ et comme $100n + 100 = 100(n + 1)$ alors $2^{n+1} \geq 100(n + 1)$.
La proposition P(n+1) est alors vérifiée.
Conclusion : pour tout n entier supérieur ou égal à 10 on a 2" ≥ 100n

3. Exercices.

<u>Livre p.53 n° 14 à 25 et ci-dessous</u>

<u>Exercice 01</u>
Démontrer par récurrence que pour tout entier n ≥ 1 , la somme des entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n + 1)}{2}$, c'est à dire $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

<u>Exercice 02</u>
Soit x un réel différent de 1.
Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1- x^{n+1}}{1-x}$

<u>Exercice 03</u>
On considère la proposition P(n) : 2" ≥ n²
1') Cette proposition est-elle vraie pour les entiers 0, 1, 2, 3, 4 , 5 ?
2°) Démontrer que la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel n différent de 3

<u>Exercice 04</u>
Soit C_n la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n : $C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \quad + n^3$
Démontrer par récurrence que pour tout n ≥ 1 : $C_n = \frac{n^2 (n + 1)^2}{4}$