1. Matrices carrées

Définition

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **matrice carrée de taille** (ou d'ordre) $\boldsymbol{n}$, tout tableau de nombres réels à $\boldsymbol{n}$ **lignes** et $\boldsymbol{n}$ **colonnes**.

Ces nombres réels sont numérotés $\boldsymbol{a_{ij}}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ où i correspond au numéro de la ligne et j correspond au numéro de la colonne du réel $\boldsymbol{a_{ij}}$.

Une telle matrice A s'écrit donc de la manière suivante :

$$A = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}^{n \text{ colonnes}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \dots \\ a \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

REMARQUES

- Pour p et q entiers strictement positifs, on définit de même des matrices à p lignes et q colonnes (si $p \neq q$ ce ne sont donc pas des matrices carrées).
- Les nombres réels du tableau sont appelés coefficients de la matrice.
- De par la définition, deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles contiennent les mêmes coefficients situés aux mêmes positions.

Exemple

$M = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 1 & 4 \\ -7 & 0 & 9 \\ 0{,}5 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 3.

Le coefficient m_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la 2e ligne et de la 3e colonne $m_{23} = 9$.

Matrice colonne

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **matrice colonne** ou vecteur colonne, tout tableau de nombres réels à n lignes et 1 colonne.

Une telle matrice A s'écrit : $A = \overbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}}^{1 \text{ colonne}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \dots \\ a \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$

Matrice ligne

Soit n un entier naturel non nul

On appelle **matrice ligne** tout tableau de nombres réels à 1 ligne et n colonnes.
Une telle matrice B s'écrit :

$$B = \underbrace{(b_1 \quad \dots \quad b_n)}_{n \text{ colonnes}} \qquad 1 \text{ ligne}$$

2. Opérations avec les matrices

Somme :

Soit A et B deux matrices carrées **de même taille** ou soit A et B deux matrices colonnes.
La **somme** de A et B est la matrice notée $\boldsymbol{A+B}$ dont les coefficients sont obtenus en **additionnant deux à deux** les coefficients qui ont la même position dans A et B.

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0,1 \end{pmatrix}$. Alors $A + B = \begin{pmatrix} 0,2+5 & 1+1 \\ 3+2 & 0,7+0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,2 & 2 \\ 5 & 0,8 \end{pmatrix}$

Produit par un réel :

Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le **produit** de la matrice $\boldsymbol{A}$ par le **nombre réel** $\boldsymbol{k}$ est la matrice notée $\boldsymbol{kA}$ dont les coefficients sont obtenus **en multipliant tous les coefficients de la matrice** $\boldsymbol{A}$ **par le nombre** $\boldsymbol{k}$.

Exemple:

Soit $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $k = 1,5$. Alors $1,5A = \begin{pmatrix} 1,5\times0,2 & 1,5\times0,2 \\ 1,5\times3 & 1,5\times0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 1,5 \\ 4,5 & 1,15 \end{pmatrix}$

Produit par une matrice colonne:

Soit A une matrice **carrée de taille** $\boldsymbol{n}$ et B une matrice **colonne à** $\boldsymbol{n}$ **lignes.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & & & & \\ \dots\dots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice A par la matrice colonne B est la **matrice colonne à** $\boldsymbol{n}$ **lignes,** notée $\boldsymbol{A \times B}$, dont le coefficient de la ligne i est le nombre $a_{i1} \times b_1 + a_{i2} \times b_2 + a_{i3} \times b_3 + \dots + a_{in} \times b_n$.

Exemple:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$A \times B = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\times5+1\times2 \\ 3\times5+0,7\times2 \end{pmatrix}$, soit $A \times B = \begin{pmatrix} 3 \\ 16,4 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices carrées

Soit A et B **deux matrices carrées de même taille.**
Le **produit** de la matrice A par la matrice B est la matrice de même taille, notée $A \times B$, dont les colonnes correspondent **au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B**.

Exemple:

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0,1 \end{pmatrix}$.

$A \times B = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2\times5+1\times2 & 0,2\times1+1\times0,1 \\ 3\times5+0,7\times2 & 3\times1+0,7\times0,1 \end{pmatrix}$, soit $A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 0,3 \\ 16,4 & 3,07 \end{pmatrix}$.

$B \times A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times0,2+1\times3 & 5\times1+1\times0,7 \\ 2\times0,2+0,1\times3 & 2\times1+0,1\times0,7 \end{pmatrix}$, soit $B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 5,7 \\ 0,7 & 2,07 \end{pmatrix}$

NB ! Attention
En général la multiplication n'est pas commutative, ie $A \times B \neq B \times A$

3. Propriétés du calcul avec des matrices

Propriétés :

Soit A , B et C des matrices carrées.

Addition des matrices carrées A et B

- Propriété de commutativité : $A + B = B + A$.
- Propriété d'associativité : $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

Multiplication d'une matrice carrée A par un nombre réel k

Pour tous réels k et k' et toutes matrices A et B :

- $(k + k')A = kA + k'A$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(kk')A = k(k'A)$
- $(kA)B = A(kB) = k(A \times B)$

Multiplication de matrices

- Propriété d'associativité : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$.
- Propriété de distributivité : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$.
- La multiplication de matrices n'est pas commutative.

Définition :

Soit A une matrice carrée. On note A^2 la matrice $A \times A$; A^3 la matrice $A \times A \times A$ et plus généralement pour un entier naturel n non nul :

A^n la matrice égale au **produit de n facteurs égaux** à la matrice A.

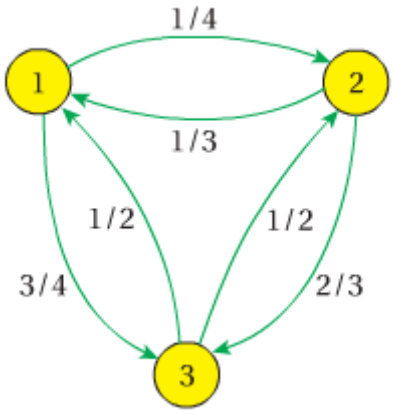
4. Evolution de processus

Définition :

On appelle **matrice de transition** des états la matrice carrée A de taille n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j donne à chaque instant le nombre, ou la proportion, ou la probabilité, des transitions possibles de l'état numéroté j à l'état numéroté i.

Exemple :

Soit le graphe suivant constitué de 3 sommets. On se déplace d'un sommet à un autre sur ce graphe en suivant les arêtes orientées.
À chaque déplacement (ou pas) sur une arête, les probabilités de se trouver sur le sommet extrémité sachant que l'on est parti du sommet origine sont indiquées sur la figure.



On suppose que ces probabilités sont identiques quel que soit le parcours déjà effectué sur le graphe, donc « arriver au sommet j à partir du sommet i » est un événement indépendant de tous les événements qui ont précédé et sa probabilité est donc toujours la même. On parle de **probabilité de transition** d'un sommet vers un autre.

Définition

La **matrice de transition** d'une marche aléatoire est la matrice carrée dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition du sommet j vers le sommet i, soit encore **la probabilité d'arriver en i sachant qu'on est parti de j**.

REMARQUES

- Les probabilités de transition **du premier sommet** vers chacun des sommets du graphe constituent la **1re colonne** de la matrice, les probabilités de transition **du 2e sommet** vers chacun des sommets du graphe constituent la **2e colonne** de la matrice et ainsi de suite…
- **Important :** en lien avec le choix fait, la somme des coefficients d'une même colonne est donc toujours égale à 1.

Dans l'exemple précédent, la matrice de transition est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/2 \\ 3/4 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition

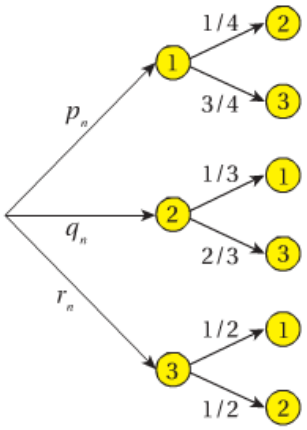
La matrice colonne **état de la marche aléatoire après *n* pas** est la matrice colonne donnant les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n pas.

REMARQUE

Dans le cadre de marches aléatoires, on travaille aussi souvent avec des matrices de transition dont le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la probabilité de transition du sommet i vers le sommet j ; les matrices des états sont alors écrites sous la forme de matrices formées d'une ligne.

Suite de l'exemple

Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des états de l'exemple précédent.



L'arbre de probabilité ci-contre permet d'établir les relations entre les probabilités d'arrivées en chaque sommet après n pas et les probabilités d'arrivée en chaque sommet après $n + 1$ pas.

À l'aide du théorème de probabilités, connu sous le nom de **formule des probabilités totales**, on déduit de cet arbre les relations suivantes :

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{2}r_n \qquad q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}r_n \qquad r_{n+1} = \frac{3}{4}p_n + \frac{2}{3}q_n$$

Par définition du produit matriciel, les relations de l'exemple sont équivalentes à l'égalité : $X_{n+1} = A \times X_n$.

Propriété

Pour une marche aléatoire associée à un déplacement sur un graphe dont la matrice de transition est notée A et la matrice colonne de l'état après n pas (n entier positif), est notée X_n.
On note alors, pour tout $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = A \times X_n$ et, pour tout $n \geqslant 0$, $X_n = A^n \times X_0$.

Suite de l'exemple

On suppose que la marche aléatoire a pour départ le sommet n° 1 du graphe. Après 3 pas, l'état de la marche aléatoire est $X_3 = A^3 \times X_0$.

Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient à l'aide de la calculatrice, $X_3 = \begin{pmatrix} 11/24 \\ 3/8 \\ 1/6 \end{pmatrix}$.

Ce qui implique par exemple que la probabilité d'être arrivé au sommet n° 2 après 3 pas est $\frac{3}{8}$.