

Devoir à la maison n°1 : correction

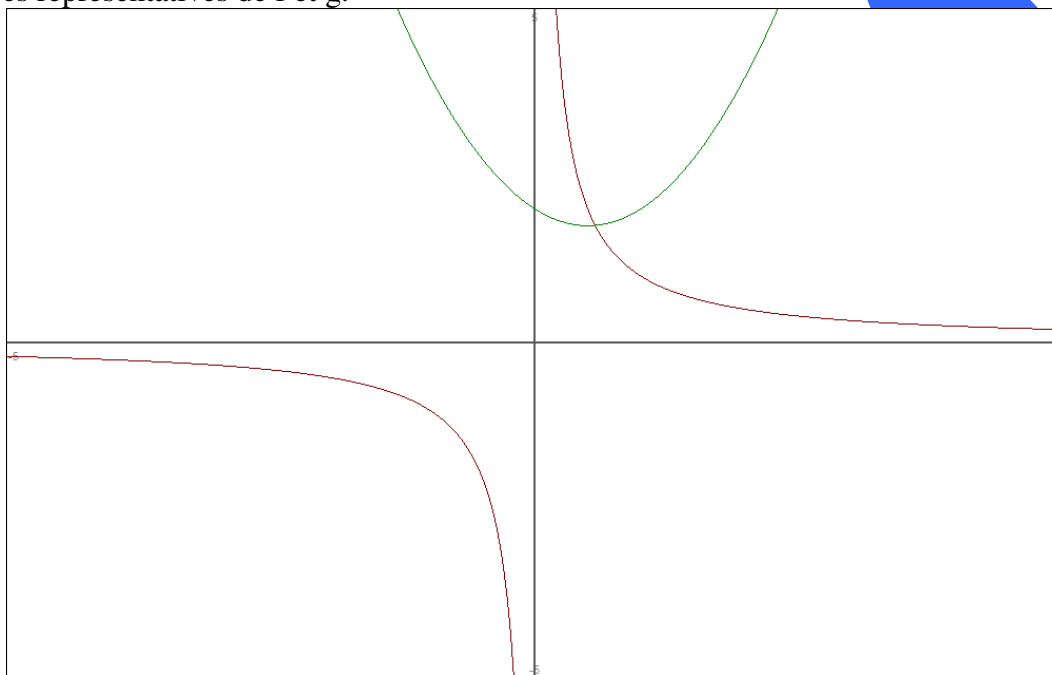
Exercice 57 p. 34

Dans les pas d'Omar Khayyâm

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

1. a) Avec la calculatrice graphique, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes représentatives de f et g .



Il semble qu'il y ait un point d'intersection

b) Montrer que, pour tout réel x non nul, l'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

Pour tout réel x non nul, l'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \frac{1}{x}$ soit encore

$x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$ puisque x est non nul, $x(x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}) = \frac{1}{x} \times x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x = 1$
soit finalement $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$

a) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$.

h est une fonction polynôme donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = 3x^2 - 2x + 2$ trinôme du second degré donc du signe de a à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, si elles existent. Or $\Delta = (-2)^2 - 3 \times 3 \times 2 = 4 - 18 < 0$

$h'(x)$ ne s'annule pas, n'a pas de racines, donc $h'(x)$ est toujours du signe de $a = 3$.

A savoir que $h'(x) > 0$ pour tout réel x .

Par conséquent, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Devoir à la maison n°1 : correction

b) Calculer $h(0)$ et $h(1)$.

$h(0) = -1$ et $h(1) = 1$

c) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$.

h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 1]$

h est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 1]$

de plus $h(0) \times h(1) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme $h(0) < 0 < h(1)$, il existe un unique réel α sur $[0 ; 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

d) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

x	$x^3 - x^2 \dots$
0.46	-0.19426
0.47	-0.17708
0.48	-0.15981
0.49	-0.14245
0.5	-0.125
0.51	-0.10745
0.52	-0.08979
0.53	-0.07202
0.54	-0.05414
0.55	-0.03612
0.56	-0.01798
0.57	0.00029
0.58	0.01871
---	---

On lit :

$0,56 < \alpha < 0,57$

Omar Khayyâm était un savant et un poète persan du XI^e siècle. Il a élaboré une méthode géométrique de résolution de certaines équations, en utilisant les points d'intersection de courbes connues.

Cette méthode se trouve dans un traité d'algèbre qu'il a rédigé. Cet exercice en est une illustration simplifiée, utilisant bien sûr des outils modernes.