Devoir à la maison n°5 : corrigé

Exercice 1 : n° 73 p.33 (spé)

Déterminer les couples d'entiers naturels (x ; y) vérifiant le système suivant

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5\,440 \\ \text{PGCD}(x,y) = 8 \end{cases}$$

Il existe deux entiers naturels a et b premiers entre eux tels que $x = 8a$ et $y = 8b$.
$x^2 - y^2 = 64a^2 - 64b^2 = 5440$ d'où $a^2 - b^2 = 85$ soit $(a - b)(a + b) = 85$
Comme a et b sont des entiers naturels, $a + b > a - b > 0$
Les diviseurs de 85 étant 1, 5 , 17 et 85, a et b sont solutions de $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 85 \end{cases}$ ou de $\begin{cases} a - b = 5 \\ a + b = 17 \end{cases}$
La résolution donne $a = 43$ et $b = 42$ ou $a = 11$ et $b = 6$
Le système de départ admet donc deux couples solutions : $(43\times8, 42\times8)$ et $(11\times8, 6\times8)$
Soit (344, 336) et (88,48)

Exercice 2 : n°65 p.63 Décomposition d'un palindrome (spé)

Un palindrome est un mot, une phrase, ou un nombre qui se lit indifféremment dans les deux sens. Par exemple « Esope reste ici et se repose. »
On veut décomposer en produit de facteurs premiers l'entier naturel a = 12 345 678 987 654 321.
1. a) Calculer $1\,001\,001 \times 111$.
b) Décomposer 1 001 001 en produit de facteurs premiers sachant que 333 667 est un nombre premier.
2. Calculer 11^2, 111^2 et $1\,111^2$.
3. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de a.

$1\,001\,001 \times 111 = 111\,111\,111$
$1\,001\,001 = 3 \times 333667$
$11^2 = 121$ $111^2 = 12321$ $1111^2 = 1234321$
On peut donc admettre sans difficultés que : $12\,345\,678\,987\,654\,321 = 111\,111\,111^2$
D'où $12\,345\,678\,987\,654\,321 = (1\,001\,001 \times 111)^2 = (3 \times 333667 \times 3 \times 37)^2 = 3^4 \times 37^2 \times 333667^2$

Exercice 1 : n° 33 p.54

Pour chaque question, une seule des trois réponses est correcte. Dire laquelle, aucune justification n'est demandée.

1. L'équation différentielle $y' = 2y + 3$
   a) n'a pas de solution sur R ;
   b) a une unique fonction solution sur R ;
   c) a une infinité de fonctions solutions sur R.
2. La seule fonction f définie sur R solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 4$ et telle que $f(0) = 3$ est définie par
   a) $f(x) = e^{-2x} + 3$
   b) $f(x) = 3e^{-2x}$
   c) $f(x) = e^{-2x} + 2$
3. Une solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 4e^{-2x}$ est définie sur R par
   a) $f(x) = e^{-3x}$
   b) $f(x) = -3x + 4$
   c) $f(x) = 4e^{-2x}$

Devoir à la maison n°5 : corrigé

Exercice 2 : n°14 p.110

f est la fonction définie sur R par $f(x) = \sin(x)$

a) Déterminer les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$

b) Conjecturer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $f^{(n)}(x)$

a) $f'(x) = \cos(x)$ $f''(x) = -\sin(x)$ $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ $f^{(4)}(x) = \sin(x)$

b) Il semble que pour tout $n = 4p$, $f^{(n)}(x) = \sin x$

tout $n = 4p + 1$, $f^{(n)}(x) = \cos x$

tout $n = 4p + 2$, $f^{(n)}(x) = -\sin x$

tout $n = 4p + 3$, $f^{(n)}(x) = -\cos x$

ou encore tout n $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Exercice 3 : n°38 p.55 A la recherche d'une fonction **(TOUS)**

On désigne par f une fonction dérivable sur R et par f ' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$;

(2) $f'(0) = 1$;

(3) la fonction f ' est dérivable sur R.

1a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$

De $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ on tire $[f'(x)]^2 = [f(x)]^2 + 1 \geq 1$ pour tout x donc $[f'(x)]^2 > 0$ ie $f'(x) \neq 0$

1b. Calculer f(0)

pour tout nombre réel x, $[f'(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ donc pour x = 0 et on a :

comme $f'(0) = 1$; $[f'(0)]^2 - [f(0)]^2 = 1$ soit $1^2 - [f(0)]^2 = 1$ ie $[f(0)]^2 = 0$ et par conséquent $f(0) = 0$

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

On sait que f et f' sont dérivables alors($[f'(x)]^2 - [f(x)]^2$)'= 1' soit $2f'f'' - 2f'f = 0$

Soit encore $f'f'' = f'f$ or pour tout réel x, f'(x) non nul d'où $f'' = f$

3. 0n pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a) Calculer u(0) et v(0).

$u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$

b) Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

$u' = f'' + f' = f + f' = u$ car d'après Q2 $f'' = f$

$v' = f'' - f' = f - f' = v$ car d'après Q2 $f'' = f$

c) En déduire les fonctions u et v.

u est telle que $u' = u$ et $u(0) = 1$ donc $u(x) = e^x$.

v est telle que $v' = -v$ et $v(0) = 1$ donc $v(x) = e^{-x}$.

d) En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$u = f' + f$ et $v = f' - f$ par soustraction $u - v = 2f$ d'où $f = \frac{u - v}{2}$ alors $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$