

Loi binomiale : RAPPEL DE COURS

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues possibles : « Succès » et « Echec ». Si on note p la probabilité d'un succès, alors la probabilité d'un échec est égale à $q=1-p$.

Si on considère une expérience aléatoire, n'ayant que deux issues, un succès de probabilité p , et un échec de probabilité $q=1-p$, répétée n fois de manière indépendante, et si on note X la variable aléatoire désignant le nombre de succès obtenus au cours de ces n répétitions, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre n et p , notée $B(n,p)$

Alors pour tout entier k , tel que $0 \leq k \leq n$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriétés :

Si X suit la loi binomiale $B(n,p)$ alors $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$

Exercice n°1

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante.

Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.

25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.

21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématique et ont obtenu le baccalauréat.

32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le baccalauréat. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat. On interroge un candidat pris au hasard. On note :

M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;

S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;

L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;

R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».

On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.

1) Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.

2) a) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de SES.

b) Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.

3) Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?

4) Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?

5) Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.

6) On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.

a) Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?

b) Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?

Exercice n°2

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $1/4$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $1/2$ à chaque lancer.

1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $1/2$ d'être prise)

a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?

2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $1/2$ d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile

3) On lance les deux pièces ensemble : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Exercice n°3

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions.

Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte.

Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard.

On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

Exercice n°4

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ».

On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les événements suivants:

B : la pièce prise est normale. $\bar{B}$: la pièce prise est truquée.

P : on obtient « Pile » au premier lancer. F_n : on obtient « Face » pour les n premiers lancers.

1) a) Quelle est la probabilité de l'événement B ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement P sachant que B est réalisé ?

2) Calculer la probabilité de l'événement $P \cap B$, puis de l'événement $P \cap \bar{B}$.

En déduire la probabilité de l'événement P .

3) Calculer la probabilité de l'événement $F_n \cap B$ puis de l'événement $F_n \cap \bar{B}$.

En déduire la probabilité de l'événement F_n

Exercice n°5

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique.

60 % des élèves pratiquent un instrument à cordes (C) . 45 % des élèves pratiquent un instrument à vent (V)

10 % des élèves pratiquent un instrument à cordes et vent.

1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »

b) Quelle est la probabilité de l'événement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés »

2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves.

On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontrer un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.

a) Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,999$

CORRECTIONS

Le début de l'exercice est l'archétype classique d'un exercice de probabilités conditionnelles.

1) En utilisant les notations de l'énoncé, nous avons $p(M)=0,37$, $p(L)=0,25$, $p(M \cap R)=0,21$, $p(S \cap R)=0,325$ et $p(L \cap R)=0,725$

2) a) On calcule $p(S)=1-(p(M)+p(L))=1-(0,37+0,25)=1-0,62=0,38$

b) On calcule $p(L \cap R)=p(L) \times p(L|R)=0,25 \times 0,725=0,18125 \approx 0,181$ arrondi au millièm

3) On calcule $p(L \cap \bar{R}) = p(L) \times p_1(\bar{R}) = 0,25 \times (1 - p_1(R)) = 0,25 \times (1 - 0,725) = 0,06875 \approx 0,069$ arrondi au millièm

4) On calcule $p_M(\bar{R}) = \frac{p(M \cap \bar{R})}{p(M)} = \frac{0,21}{0,37}$ arrondi au millièm.

Puisque $p(M)=0,37$ et $p(M \cap R)=0,21$, on calcule $p_M(R) = \frac{p(M \cap R)}{p(M)} = \frac{0,21}{0,37} = \frac{21}{37}$ et

donc $p_M(\bar{R}) = 1 - p_M(R) = 1 - \frac{21}{37} = \frac{16}{37} \approx 0,432$ arrondi à 10-3

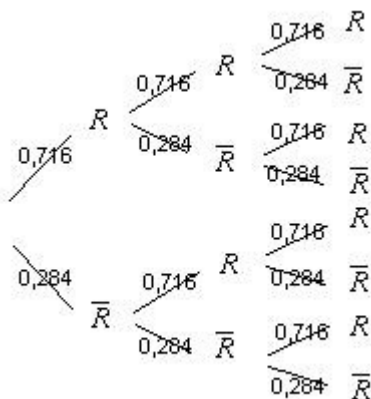
5) En appliquant la formule des probabilités totales,

$p(R)=p(L \cap R)+p(S \cap R)+p(M \cap R) \approx 0,181+0,325+0,21 \approx 0,716$, d'où la réponse

6) On répète 3 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut avoir été reçu (issue R que nous appellerons SUCCES, de probabilité 0,716) ou qui peut avoir échoué (issue $\bar{R}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité $1-0,716=0,284$).

Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre 3 et 0,716.

On peut matérialiser cette situation par un arbre :



a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des trois candidats est reçu » est l'événement « les trois candidats ne sont pas reçus », de probabilité 0,2843. L'événement considéré a donc pour probabilité $1-0,2843 \approx 0,977$ arrondi au millièm

b) Pour calculer la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus, soit on compte le nombre de chemins répondant à cette situation sur l'arbre (on en compte trois : $RR\bar{R}$, $R\bar{R}R$ et $\bar{R}RR$, chacun d'eux représentant une probabilité égale à $0,716 \times 0,284$), soit on applique la formule donnant le nombre de succès dans une situation binomiale, pour aboutir au calcul :

$$\text{nombre de succès} \times \text{nombre de succès} \times \text{nombre de succès} = 3 \times 0,716^2 \times 0,284^1 \approx 0,437$$

arrondi au millièm

Exercice n°2

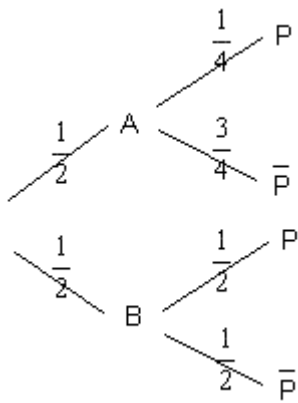
Notons A l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce truquée » et B l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce équilibrée ».

L'énoncé nous fournit $p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$.

1) (a) Notons P l'événement "obtenir Pile lors d'un lancer".

L'énoncé nous fournit $p_A(P)=\frac{1}{4}$ donc $p_A(\bar{P})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; et $p_B(P)=\frac{1}{2}$ donc $p_B(\bar{P})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ceci peut se traduire par l'arbre de probabilités



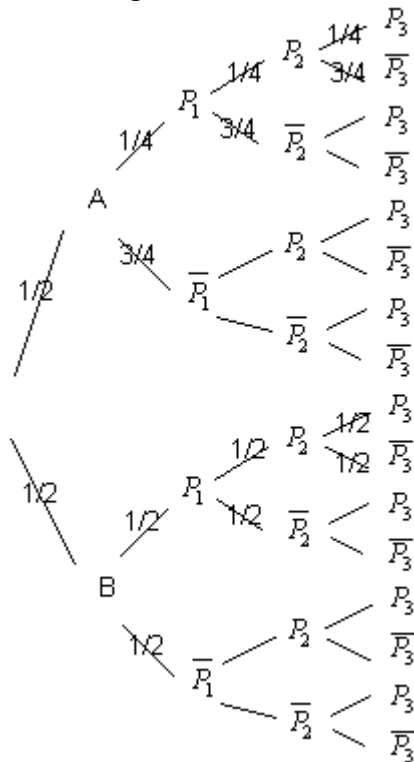
La formule des probabilités totales appliquée au système complet $\{A;B\}$ fournit :

$$p(P) = p(A \cap P) + p(B \cap P) = p(A) \times p_A(P) + p(B) \times p_B(P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$p_P(A) = \frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

(b) On demande

(c) Notons $P_1; P_2; P_3$ les probabilités d'obtenir Pile respectivement aux tirages n°1, 2 et 3. On peut ainsi dresser l'arbre de probabilité :



Raisonnons avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face ». D'après la formule des probabilités totales, ce dernier événement a pour probabilité :

$$\begin{aligned} p(P_1 \cap P_2 \cap P_3) &= p(A \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3) + p(B \cap P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= p(A) \times p_A(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + p(B) \times p_B(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{128} + \frac{1}{16} = \frac{35}{128} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile avec une pièce choisie est donc égale à $1 - \frac{35}{128} = \frac{93}{128}$

2) La situation est cette fois-ci différente de la question 1) (c) car on retire une pièce au hasard avant chaque lancer.

On répète ainsi 3 fois consécutivement et de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli décrite dans la

question 1) (a), qui admet deux issues : $p(P) = \frac{3}{8}$ donc $p(\bar{P}) = \frac{5}{8}$.

Le nombre de succès (obtention de Pile) sur les trois répétitions suit donc une loi binomiale de

paramètre $p(P) = \frac{3}{8}$ et $n=3$.

On raisonne encore une fois avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir

trois fois face », de probabilité $(p(\bar{P}))^3 = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile sur les trois lancers (et choix) est donc $1 - \frac{125}{512} = \frac{387}{512}$

3) Les résultats des deux pièces sont indépendants l'un de l'autre.

Si on note PA l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce truquée » et PB l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce équilibrée », l'événement cherché aura donc une probabilité égale à :

$$p(P_A \cap P_B) + p(\bar{P}_A \cap \bar{P}_B) = p(P_A) \times p(P_B) + p(\bar{P}_A) \times p(\bar{P}_B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice n°3

1) On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées. Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p=0,25$ et une probabilité échec égale à $q=1-p=1-0,25=0,75$. Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre 10 et 0,25.

2) On a ainsi :

$$p(X=8) = \binom{10}{8} 0,25^8 \times 0,75^2 = \frac{10 \times 9}{2} \times 0,25^8 \times 0,75^2 \quad , \quad p(X=9) = \binom{10}{9} 0,25^9 \times 0,75^1 = 10 \times 0,25^9 \times 0,75^1$$

et enfin

$$p(X=10) = \binom{10}{10} 0,25^{10} \times 0,75^0 = 0,25^{10}$$

L'événement considéré a donc pour probabilité la somme de ces trois derniers nombres.

Exercice n°4

$$p(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{3}$$

1) a) Les choix de pièces dans l'urne étant équiprobables,

b) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir

« Pile » vaut $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $p_B(P) = \frac{1}{2}$

2) On calcule $p(P \cap B) = p(B) \times p_B(P) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Puisque $p(B) = \frac{2}{3}$, alors $p(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Si l'événement $\bar{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Pile » est nulle, puisque la pièce truquée possède « deux « faces ». Ainsi $p_{\bar{B}}(P) = 0$.

On en déduit $p(P \cap \bar{B}) = p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(P) = \frac{1}{3} \times 0 = 0$.

En utilisant la formule des probabilités totales, puisque le système $(B; \bar{B})$ est un système complet d'événement,

on obtient $p(P) = p(P \cap B) + p(P \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$

3) Si l'événement B est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « normale » a été choisie, la probabilité d'obtenir

« Face » au cours des n premiers lancers suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$,

donc $p_B(\bar{F}_n) = \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et ainsi $p(F_n \cap B) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Si l'événement $\bar{B}$ est réalisé, c'est-à-dire si une pièce « truquée » a été choisie, la probabilité d'obtenir « Face » vaut 1 à chaque lancer, donc la probabilité d'obtenir « Face » au cours des n premiers lancers vaut 1, c'est-à-

dire $p_{\bar{B}}(F_n) = 1$ et ainsi $p(F_n \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

En utilisant la formule des probabilités totales, puisque le système $(B; \bar{B})$ est un système complet d'événement, on obtient :

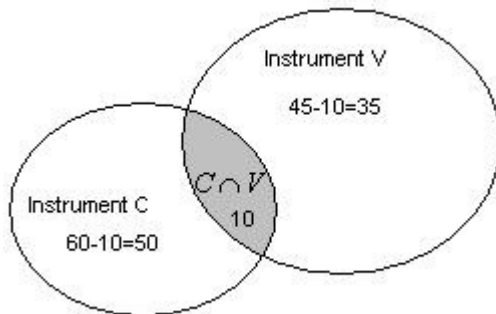
$$p(F_n) = p(F_n \cap B) + p(F_n \cap \bar{B}) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

Exercice n°5

L'énoncé nous fournit $p(C)=0,6$, $p(V)=0,45$ et $p(C \cap V)=0,1$

1) On calcule $p(C \cup V) = p(C) + p(V) - p(C \cap V) = 0,6 + 0,45 - 0,1 = 0,95$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-contre)



2) a) On calcule $p(C \cup V) - p(C \cap V) = 0,95 - 0,1 = 0,85$

(on aurait pu aussi raisonner avec les effectifs ramenés à 100 élèves, conformément au diagramme ci-dessus)

b) L'énoncé (ou le diagramme) fournit $p_C(V) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

3) On répète n fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à choisir un élève qui peut pratiquer un instrument C (SUCCES, de probabilité 0,6) ou ne pas pratiquer un instrument C (issue $\bar{C}$ que nous appellerons ECHEC, de probabilité $1-0,6=0,4$). Le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètre n et 0,6.

a) L'événement contraire de l'événement « au moins un des élèves choisis pratique un instrument C » est l'événement « les n élèves choisis ne pratiquent pas un instrument C » de probabilité $0,4^n$. Ainsi $p_n = 1 - 0,4^n$.

b)

$$p_n \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,4^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,4^n \leq 0,001$$

$$\Leftrightarrow 0,4^n \leq 0,001 \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,4) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,4)} \text{ car } \ln(0,4) < 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 7,53 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

Puisque n est entier, on déduit donc $n \geq 8$